Exercice 1. Formule d'Euler pour $\sin z$. (voir par exemple Valiron t1, page 40, puis page 56) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}, \exp z=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{m})^m$, et montrer que cette limite est uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$.

En déduire que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\sin z=\lim_{n\to\infty} Q_{2n}(x)$, où Q_n est un polynôme impair de degré $2n-1$ dont les racines sont $x_k=n\,\mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{n}$.

Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}, \sin z=z.\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n-1}[1-\frac{x^2}{4n^2\mathrm{tg}^2\frac{k\pi}{2n}}]$

En déduire que pour tout $z\in\mathbb{C}, \sin z=z.\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n-1}[1-\frac{x^2}{\pi^2n^2}]$

Est-il-légitime d'en déduire $(\ln\sin z)'=\mathrm{cotg}\,z=\frac{1}{z}-2z\sum\frac{1}{\pi^2n^2-z^2}$

Exercice 2. Polynômes de Bernoulli (voir Demailly ou Komornik t.1).

Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes B_n tels que

$B_0(t)=1$

$(*)\quad B_n'=nB_{n-1}$

$\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{dt}=0$ si $n\geqslant 1$

Vérifier que B_i est un polynôme de degré i

On pose $b_i=B_i(0)$ Montrer que

$B_p(x)=\sum_0^p\binom{p}{m}b_m x^{p-m}$

$B_p(1-x)=(-1)^pB_p(x)$

$b_i\in\mathbb{Q}$

On considère la fonction $1-$ périodique $\tilde{B}_p=B_p(x-E(x))$.

En utilisant la formule $(*)$, montrer que le n-ième coefficient de Fourier de $\tilde{B}_p$ est

$c_n(p)=-\frac{p!}{(2i\pi)^p}$ si $p\neq 0$, et $c_0(p)=0$ si $p\geqslant 1$

En déduire que $B_{2k}(x)=\frac{(-1)^{k+1}2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\Sigma_1^{+\infty}\frac{\cos 2\pi n x}{n^{2k}}$, et discuter de la nature de la convergence

$B_{2k+1}(x)=\frac{(-1)^{k+1}2(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}}\Sigma_1^{+\infty}\frac{\sin 2\pi n x}{n^{2k+1}}$

Montrer que les nombres $\frac{\Sigma_1^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}}{\pi^{2k}}$ et $\frac{\Sigma_1^{+\infty}\frac{(-1)}{n^{2k}}}{\pi^{2k}}$ sont des nombres rationnels, et les expliciter.

Exercice 3. Application d'une formule de Taylor. Expliquer pourquoi :

En général, au voisinage d'un point d'inflexion, une courbe traverse sa tangente

En général, une courbe traverse son cercle osculateur.

Soit $f\colon U\subset R^2\to R$, de classe C^∞. On suppose que $f'\neq(0,0)$D en tout point de U, de sorte que f=0 est une courbe lisse. On suppose que $f(0,0)=0$, et on écrit la formule de Taylor a l'ordre 2 :$f(x,y)=ax+by+ex^2+2fxy+g$ $y^2+o(x,y)^2$. Exprimer une cns sur a,b,c,d,e,f pour que $(0,0)$ soit un point d'inflexion

Exercice 4. Soit $f\colon]-R,R[\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. montrer que f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $\geqslant R$ si et seulement si pour tout $0\leqslant a<R$ il existe une constante C telle que pour tout entier $k\geqslant 0$, on ait $\mathrm{Sup}_{|x|\leqslant a}|f^{[k]}(x)|\leqslant\frac{C}{a^k}\frac{(k-1)!}{1-(\frac{x}{a})^k}$

Exercice 5. (livre de Demailly) Un électron se promène dans un champs éléctromagnétique ; il subit donc une force égale à $\vec{V}\wedge\vec{B}+\vec{E}$. Décrire les trajectoires, quand $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont constants.

Exercice 6. Komornik 2 p.99. Soit a_n une suite de nombre réels. la fonction $f(x)=\sum_{\{n/a_n<x\}}\frac{1}{n^2}$ est croissante et discontinue exactement aux points a_n. L'ensemble des discontinuités d'une fonction croissante est dénombrable.

p. 102 $*$ Si $A\subset\mathbb{R}$ est négligeable, il existe une fonction croissante qui n'est dérivable en aucun point de A.

Exercice 7. Portrait de phase d'une particule à un degré de liberté dans un champ Newtonien (Arnold MMMC)

D'après Newton, une particule dans un champs newtonien à un degré de liberté suit l'équation $\frac{d^2}{dt^2}x=-u'(x)$, où est une certaine fonction, appelée le potentiel. A cette équation, on associe le plan des phases (x,y) et l'équation différentielle

(*) $\frac{d}{dt}x = y, \frac{d}{dt}y = -u'(x)$.

a) Dessiner le champ de vecteur associé à $*$ quand $u(x) = x^2/2$

b)Dessiner le champ de vecteur associé à l'équation $(*)$, quand $u(x) = x^3 - x$

c)Dessiner le champ de vecteur associé à $*$ quand u est une fonction paire qui a deux niveaux minimums pour $x = -1$ et $x = 1$, un maximum local et un seul entre les deux en $x = 0$ et qui vaut x^2 si $|x| > 2$.

d) On considère la fonction $y^2/2 + u(x) = H(x, y)$. H est l'énergie totale, u l'énergie potentielle, et $y^2/2$ l'énergie cinétique. Montrer que si x_0 est un maximum local de l'energie potentielle, $(x_0, 0)$ est un point d'équilibre instable du champ de vecteur alors que si c'est un minimum local c'est un point d'équilibre stable.

Montrer que le long d'une trajectoire, H reste constant.

Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux points d'une même trajectoire atteints à des instants t_1 et t_2. Montrer que si t_2 est le premier instant ou la trajectoire passe en x_1 à l'instant t_1, et si h est le niveau d'energie de cette trajectoire, On a

$$t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(h - u(x))}}$$

Dans les cas a, b, Discuter suivante les valeurs initiales, la périodicité de la solution de $*$ telle que $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.

Si u est paire, strictement croissante sur $[0, b]$ et si si $U(b) = H(b, 0) = h > 0$, montrer que $y = \pm\sqrt{2(h - u(x)}$ est l'équation d'une trajectoire périodique de période $T = 4\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{2(h - u(x))}}$

Cas du pendule pesant $u(x) = k(1 - \cos x)$. Montrer que $T = \frac{2\pi}{k}(1 + \frac{b^2}{16} + o(b^3))$

Exercice 8. Normes d'applications linéaires, developpements limités. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On munit $L(E)$ de la norme associée Si $A, B \subset GL(E)$, on pose $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$.

Montrer que si $\|\mathrm{Id} - A\| < 1$ alors A est inversible, et que $(I - A)^{-1} = I - A + A^2 + o(\|A\|^2)$

Montrer que il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\|\mathrm{Id} - A\| < \varepsilon$ et $\|\mathrm{Id} - B\| < \varepsilon$ alors $\|\mathrm{Id} - ABA^{-1}B^{-1}\| < \frac{1}{2}\|\mathrm{Id} - B\|$

En déduire que si $G \subset Gl(E)$ est un sous-groupe discret, alors le sous-groupe H engendré par $B(\mathrm{Id}, \varepsilon) \cap G$ est nilpotent.

Dans Gl(3, R), montrer que le groupe engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est conjugué à un sous-groupe engendré par deux matrices arbitrairement petites.

Exercice 9. Livre de Gelbaum-Olmsted "counter examples in Analysis" Trouver des exemples de séries numérqiues doubles a_{pq} telles que les sommes suivantes existent et soient distinctes $\Sigma_p(\Sigma_q a_{pq})$ $\Sigma_q(\Sigma_p(a_{pq})$.

Exercice 10. Pour qu'une série (u_n) soit absolument convergente, il faut et il suffit que pour toute bijection de $\mathbb{N}$, la série $u_{\varphi(n)}$ soit convergente.

Si une série de nombre réels est convergente, mais pas absolument convergente, pour tout nombre reél x il existe une bijection de $\mathbb{N}$ telle que $x = \sum a_{\varphi(n)}$; cela est il encore vrai pour les séries de nombres complexes ?

Exercice 11. Transformée de Legendre (Arnold Equadiff 2) ; Soit $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe C^2, et soit $J = f'(I)$ l'image par la dérivée f' de I. Si $p \in J$, on pose $g(p) = \sup_x(px - f(x))$.

Montrer que $g: J \to \mathbb{R}$ est strictement convexe.

Montrer que sur $I \times J$, on a $f(x) + g(p) \geqslant px$, et que si $f'' > 0$ il y a égalité ssi $p = f'(x)$

La fonction g s'appelle transformée de Legendre de f. Montrer que f est la transformée de Legendre de g.

Calculer g si $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$

Considérons l'équation de Clairaut $y = \frac{dy}{dx}x - g(\frac{dy}{dx})$, ou g est strictement convexe.

Montrer que l'enveloppe des solutions affines $y = px - g(p), p = \text{cte}$ est le graphe de f.

Peut on généraliser à $\mathbb{R}^n$; que vaut g si f est une norme strictement convexe ?

* Que penser d'un espace de Banach à norme strictement convexe C^2?